

ریاضی فور یازدهم (تجربی)

به سبک آبادانی www.insha.ir

موشکافی مسائل کتاب درسی

مسائلی از امتحانات نهایی **آبادان** و هومه!

نویسنده: حسین ایزن

قسمت دوم



I ♥ Math



ریاضی فور یازدهم (تجربی)

به سبک آبادانی

(نسخه دست نویس - بخش دوم)

✓ موشکافی مسائل کتاب درسی

✓ مسائلی از امتحانات نهایی آبادان و هومه!

حسین ایزن

مقدمه

به لطف خدا نوشتن قسمت اول کار جدید من یعنی **ریاضی فور یازدهم (تجربی) به سبک آبادانی** هم تموم شد بر خلاف کتاب های قبلی قصد دارم نسخه اولیه این کتاب رو به صورت دست نویس منتشر کنم این کارم هم پنتا دلیل داره:

اول اینکه نسخه آزمایشی کتاب ریاضی یازدهم تجربی به تازگی منتشر شده و نسخه نهایی هنوز بیرون نیومده
دوم اینکه بچه های زرنگی که می خوان درسای سال آینده رو پیش خوانی کنن منبعی واسه درس ریاضی ندارن
سوم اینکه به خاطر حجم زیاد مطالب ریاضی یازدهم، تایپ و صفحه آرایی کتاب زمان زیادی می بره و عملاً کتاب به موقع به دست بچه ها نمیرسه
بنابراین من سعی می کنم هر دو سه هفته یکبار یک بخش از کتاب ریاضی فور رو پاکنویس و اسکن کنم و واستون بزارم روی اینترنت. هر چند کیفیت اسکن اونطور که می خواستم نشد ولی مطمئن باشید که از فوندن کتاب لذت می برید.

در مورد سبک نوشتن کتاب هم باید فرمتتون عرض کنم که حتی الامکان سعی کردم چهارچوب های کتاب درسی رو رعایت کنم یعنی اول از همه تمرین ها و مسائل کتاب درسی رو با هم بررسی می کنیم و در پایان هر درس هم قسمتی تحت عنوان **مسائل امتحانات نهایی آبادان و هومه** قرار دادم که مفصوص بچه های زرنگ تر هست.
بعد از هر مبحث هم پنتا تمرین قرار دادم که می تونید راهنمایی و جواب تمرین ها رو در کانال تلگرام ریاضی فور **@riazikhor** ببینید. اگر در مورد مطالب کتاب سوالی دارید از طریق تلگرام به همین شماره ای که دادم پیغام برید.

مثل همیشه سعی کردم که حاصل کارم کم اشتباه از آب در بیاد امیدوارم این تلاش مورد قبول دانش آموزان سرزمینم و دبیران عزیز قرار بگیره. مشتاقانه پذیرای نظرات ارزشمند همه عزیزان هستم.

در آفر لازمه تشکر ویژه ای داشته باشم از مدیران مفرم سایت های پی سی داندور، کنکور
(<http://konkur.in>)، ریاضی سرا (<http://riazisara.ir>)، کنکوریو (<http://konkuru.ir>)، کتابناک
(<http://ketabnak.com>) و ... که زحمت انتشار کتابهای قبلی من رو بر عهده گرفتند.

و اما روشهای ارتباط:

کانال تلگرام ریاضی فور @riazikhor

SMS: 0938 572 5274

وبلاگ انتگرال فور: integralkhor.blogfa.com

ایمیل انتگرال فور: integralkhor@gmail.com

حسین ایزن

آبدان - ۴ تیرماه ۱۳۹۶

چون دوستان زیادی از من در مورد کتابهام سوال می کنند خدمتتون بگم که فعلا این سه کتاب از من چاپ شده که در زیر عکسشون رو ملاحظه می کنید و برای تهیه این کتابها کافیه به کتابفروشی های معتبر شهر خودتون مراجعه کنید !! چون همشون به صورت رایگان در اینترنت در دسترس همه هستن. (بگذریم که عده ای این کتابها رو به اسم خودشون به ملت می فروشن!!)



اولین کتابم انتگرال فور (جلد اول) هستش که حدود پنج سال پیش منتشر شده و در مورد انتگرال نامعین هست و بیشتر به کار دانش جوها میفوره البته دانش آموزای زرنگ و علاقمند هم چیزهای جالبی توی این کتاب پیدا می کنن. این کتاب علاوه بر ایران در افغانستان هم طرفدارای زیادی داره!

روشای عدم موفقیت در کنکور!

حسین ایزن

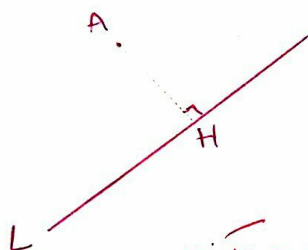


روشای عدم موفقیت در کنکور اسم دومین کتاب من هست که چند ماهیه منتشر شده و البته به معروفیت انتگرال فور نیست. این کتاب در اصل برای دانش آموزای دبیرستانی که قصد شرکت در کنکور سراسری رو دارن نوشته شده و حاصل تجربیات من در زمینه کنکور هست. این کتاب به زبان طنز نوشته شده و میتونه واسه دانش جوهایی که میخوان کنکور ارشد بدن و کلا واسه کسانی که دنبال شیوه های مناسب مطالعه هستن مفید باشه.

		<p>و اما سومین کتاب من اسمش دنباله فور هست این کتاب در مورد دنباله های حسابی و هندسی صحبت می کنه و برای دانش آموزای دبیرستانی و داوطلبان کنکور نوشته شده.</p>
---	--	---

فاصله نقطه از خط

اگر A نقطه ای خارج از خط L باشد فاصله این نقطه از خط برابر است با طول عمودی که از A بر خط L رسم می شود دقت کنید که این فاصله کوتاه ترین مسیر از A به L می باشد.



$$\text{فاصله نقطه } A \text{ از خط } L = AH$$

حال اگر قالب یک مثال فاصله نقطه از خط رو با هم کار می کنیم

مثال: فاصله نقطه $A(7, 5)$ از خط L به معادله $4x + 3y = 18$

بدست آورید

حل: اگر خطی که از نقطه A می گذره و بر L عمود هست رو با L' بنویس
بدین چون L و L' بر هم عمود هستند داریم

$$\left[\begin{array}{l} m \cdot m' = -1 \\ \Rightarrow m' = -\frac{1}{m} \end{array} \right] \quad \begin{array}{l} \text{شیب } L' \text{ ها} \\ \text{شیب } L \end{array}$$

پس اول شیب خط L رو بدست میاریم:

$$\Rightarrow 4x + 3y = 18 \Rightarrow 3y = 18 - 4x \Rightarrow y = 6 - \frac{4}{3}x$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} m = -\frac{4}{3} \\ \Rightarrow m' = \frac{3}{4} \end{array} \right]$$

حالا با داشتن شیب m' و مختصات نقطه A می توانیم معادله خط L' رو بنویسیم.

۲۵

$$L' : y - y_A = m'(x - x_A) \Rightarrow y - 5 = \frac{3}{4}(x - 7)$$

$$\Rightarrow y = \frac{3}{4}x - \frac{1}{4} \xrightarrow{\times 4} 4y - 3x + 1 = 0 \quad \text{معادله } L'$$

حالا اگر معادله خطوط L و L' رو در یک دستگاه ۲ معادله ۲ مجهول بنویسیم
از حل دستگاه معادلات نقطه H یعنی محل برخورد دو خط بدست میاد:

$$\begin{cases} 4x + 3y = 18 \rightarrow x(3) \\ 3x - 4y = 1 \rightarrow x(-4) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 12x + 9y = 54 \\ -12x + 14y = -4 \end{cases} \Rightarrow \begin{aligned} &\text{جمع} \\ &\Rightarrow 23y = 50 \Rightarrow y = 2 \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} 23y = 50 &\Rightarrow y = 2 \\ &\Rightarrow 4x + 3(2) = 18 \\ &\Rightarrow x = 3 \end{aligned} \right\} \text{پایه ای}$$

بنابراین معادلات نقطه H (محل برخورد دو خط L و L') می شود $H(3, 2)$
و در آخر کافیست فاصله AH رو بدست بیاریم.

$$AH = \sqrt{(x_H - x_A)^2 + (y_H - y_A)^2} = \sqrt{(3 - 7)^2 + (2 - 5)^2}$$

$$\Rightarrow AH = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$$

خب قبول داریم که روشی بالا برای بدست آوردن فاصله یک نقطه از خط خیلی طولانی هست بنابراین در ادامه فرمولی را یاد می گیریم که با استفاده از ادن بنویسیم فاصله نقطه از خط رو راحت تر حساب کنیم البته این روشی رو هم که در اینجا رفتیم خوب یاد بگیریم. البته تلفظش!

اگر نقطه نقطه $A(x_0, y_0)$ از خط L به معادله کلی $ax+by+c=0$ رد d بنامیم. برای محاسبه d از رابطه زیر استفاده می‌کنیم

$$AH = d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

حالا مثال قبل رو از این فرمول حل می‌کنیم

$$A(7, 5) \quad L: 4x + 3y = 18$$

اول از همه ۱۸ رو می‌بریم سمت چپ تا معادله خط L به صورت $ax+by+c=0$ در بیاد. $A(x_0, y_0)$

$$\Rightarrow 4x + 3y - 18 = 0$$

$$\Rightarrow d = \frac{|4(7) + 3(5) - 18|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = \frac{25}{5} = 5$$

دیدیم که مسئله سه گونه حل شده!

فقط حواسمون باشه که اول معادله خط داده شده رو به صورت استاندارد $ax+by+c=0$ در بیاریم بعدش توی فرمول d جایگزین کنیم. خیلی از بچه‌ها همینجا توی بی‌دنی!

به نلته دیدیم اینده بهره معادله خط رو طوری بنویسیم که عدد کسری نداشته باشیم مثلا

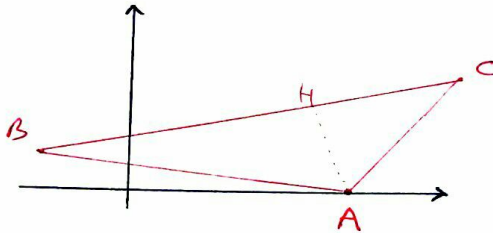
$$y = \frac{3}{4}x + 5 \quad \times 4 \Rightarrow 4y = 3x + 20$$

$$\Rightarrow 4y - 3x - 20 = 0$$

به مثال ساده اما مهم از کتاب درسی

مثال: مثلث با رئوس $A(3,0)$ و $B(-5,1)$ و $C(7,2)$ را در نظر بگیرید

الف) شیب ضلع BC را بدست آورید و معادله آن را بنویسید



اول از همه ببینیم که مثلث رو

رسم کنیم

قیمت الف که آسونه

$$m_{BC} = \frac{y_C - y_B}{x_C - x_B} = \frac{2 - 1}{7 - (-5)} = \frac{1}{12} = \frac{1}{12}$$

$$\Rightarrow L_{BC}: y - y_B = m_{BC}(x - x_B) \Rightarrow y - 1 = \frac{1}{12}(x + 5)$$

$$\Rightarrow 12y - 12 = x + 5 \Rightarrow 12y - x - 17 = 0$$

ب) فاصله راس A تا ضلع BC را بدست آورید.

$$AH = \frac{|12(x_A) - (y_A) - 17|}{\sqrt{12^2 + 1^2}} = \frac{|12(3) - (0) - 17|}{\sqrt{145}} = \frac{19}{\sqrt{145}} = \frac{19}{\sqrt{145}}$$

ج) طول ضلع BC را بدست آورید و سپس با استفاده از طول ارتفاع AH مساحت مثلث را بیابید.

$$BC = \sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2} = \sqrt{(7 - (-5))^2 + (2 - 1)^2} = \sqrt{145} = \sqrt{145}$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AH \cdot BC = \frac{1}{2} \left(\frac{19}{\sqrt{145}} \right) (\sqrt{145}) = 19$$

مساحت مثلث ABC

۲۸

د) نسبت های مثلثاتی زاویه $\hat{A}BC$ را از دد روشی
به دست آورید (این قسمت رو خودم (فنا کردم)

$$\hat{A}BC = \theta$$

روش اول : اول طول AB رو بدست میاریم :

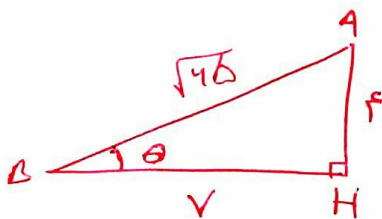
$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{(-5-3)^2 + (1-0)^2} = \sqrt{45}$$

حالا در مثل ABH با داشتن طول AB و AH از قضیه فیثاغورث

طول BH رو بدست میاریم :

$$BH = \sqrt{AB^2 - AH^2} = \sqrt{45 - 12} = \sqrt{33} = \sqrt{V}$$

حالا در مثل ABH داریم :



$$\sin \theta = \frac{4}{\sqrt{45}} \quad \cos \theta = \frac{\sqrt{V}}{\sqrt{45}}$$

$$\tan \theta = \frac{4}{\sqrt{V}} \quad \cot \theta = \frac{\sqrt{V}}{4}$$

روش دوم : در قسمت ج) مساحت مثلث رو برابر ۲۴ بدست آوردیم
از طرفی مساحت مثلث رو می تونیم از فرمول زیر هم محاسبه کنیم

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot BC \cdot \sin \theta \Rightarrow 24 = \frac{1}{2} (\sqrt{45})(12) \sin \theta$$

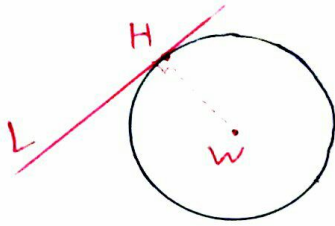
$$\Rightarrow \sin \theta = \frac{4}{\sqrt{45}} \quad \cos \theta = \sqrt{1 - \sin^2 \theta} = \sqrt{1 - \frac{16}{45}} = \frac{\sqrt{V}}{\sqrt{45}}$$

$$\Rightarrow \tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{4}{\sqrt{V}} \quad \cot \theta = \frac{\sqrt{V}}{4}$$

به مثال هم دیکه از کتاب

مثال: خط $3x - 4y = 0$ بر دایره ای به مرکز $W(2, -1)$ مماسی است

تقاطع دایره را بیابید.



راهنمایی: خط مماسی بر دایره بر تقاطع گذشته از نقطه W مماسی عمود است.

حل: خوشفشانه کتاب راهنمای اصلی رو انجام داده در واقع اگر نقطه مماسی خط با دایره رو H بنامیم تقاطع دایره میسه همون فاصله نقطه W تا خط L یا فاصله WH

$$R = WH = \frac{|3(2) - 4(-1)|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{10}{5} = 2$$

آقا اجازه: این که خیلی ساده بود! شما گفتید مهمه!

استاد: باز هم میلم که مهمه! به قول یکی از دوستان بعضی از مسئله ها مسئله گوشت چرخ کرده می مونن! که میسه باهاشون هزار جور غذا درست کرد!

این مسئله هم از اون دسته مسائلی هست که میسه سوالاتی جانبی از نویسنه در آورد. مثلاً این مثال رو خودت حل کن.

مثال: در مثال قبل مختصات نقطه H را به دست آورید.

آقا اجازه: چون خط HW بر L عمود هست پس سبب اون راهی نویسنه

از ردی سبب L به دست بیاریم و معادله ی رو بنویسیم. بعدش به دستگاه 2 معادله و 2 مجهول می نویسیم که مختصات نقطه H میسه معل بر خورد خط L و خط HW

اسناد : اهمیت ! به قول ربه ها دستم را !

حالا این راه حلی که گفتی رو می نویسیم.

اول شیب خط L رو می نویسیم :

$$L : 3x - 4y = 0 \Rightarrow 4y = 3x \Rightarrow y = \frac{3}{4}x \Rightarrow m = \frac{3}{4}$$

اگر خط حادی نقاط HW رو L' بنامیم چون $L \perp L'$ پس

$$m' = -\frac{1}{m} = -\frac{4}{3} \quad \left| \text{شیب خط } L' \right.$$

حالا می توانیم معادله خط L' رو هم بنویسیم.

$$L' : y - y_w = m' (x - x_w) \Rightarrow y + 1 = -\frac{4}{3} (x - 2)$$

$$\Rightarrow y = -\frac{4}{3}x + \frac{5}{3} \quad \left| \text{معادله خط } L' \right.$$

حالا معادله خطوط L و L' رو نویسیم که از حل دستگاه

محل برخورد دو خط یعنی نقطه H بدست میاد :

$$\begin{cases} y = -\frac{4}{3}x + \frac{5}{3} \\ y = \frac{3}{4}x \end{cases} \Rightarrow y = y \Rightarrow \frac{3}{4}x = -\frac{4}{3}x + \frac{5}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{3}{4}x + \frac{4}{3}x = \frac{5}{3} \Rightarrow \frac{25}{12}x = \frac{5}{3} \Rightarrow x = \frac{4}{5}$$

$$\Rightarrow y = \frac{3}{4}x = \frac{3}{4} \left(\frac{4}{5} \right) = \frac{3}{5}$$

$$\Rightarrow H \left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5} \right) \quad \left| \text{مقاطع } H \right.$$

استاد : این راه خیلی که رفتیم خوب بود البته بعدها یادمان
این مسئله رو حداقل از سه چهار روش حل می‌کنیم!

آقا اعازه : مده میته ؟!

استاد : چرا نمیشه ! الان سه روشی دیدگیه واست می‌نویسیم.

روشی دوم : ^{از}مقتصات نقطه H روی صورت $H(x, y)$ فرض کنیم چون

نقطه H روی خط $L: y = \frac{3}{4}x$ قرار داده پس می‌توانیم

مقتصات H روی صورت $H(x, \frac{3}{4}x)$ بنویسیم. (از طرفی چون

خط L' بر L عموده شیب خط L' برابر $-\frac{4}{3}$ میشه چون نقاط

H و W دو نقطه روی L' هستن می‌تونیم بنویسیم :

$$m' = \frac{y_H - y_W}{x_H - x_W} = -\frac{4}{3} \Rightarrow \frac{\frac{3}{4}x + 1}{x - 2} = -\frac{4}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{9}{4}x + 3 = -4x + 8 \Rightarrow$$

$$\frac{9}{4}x + 4x = 5 \Rightarrow \frac{25}{4}x = 5 \Rightarrow x = \frac{4}{5}$$

$$\Rightarrow y = \frac{3}{4}x = \frac{3}{4}\left(\frac{4}{5}\right) = \frac{3}{5}$$

$$\Rightarrow H\left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right) \quad \left. \begin{array}{l} \text{مقتصات نقطه } H \end{array} \right\}$$

* دقت کنید ایده این مسئله یعنی نوشتن مقتصات H به صورت $H(x, \frac{3}{4}x)$ خیلی به کار میاد.

روشی سوم: فاصله WH رو در مسئله اصلی برابر ۲ در آوریم
از طرفی طبق فرمول فاصله دو نقطه داریم:

$$WH = \sqrt{(x_H - x_W)^2 + (y_H - y_W)^2} = 2$$

$$\Rightarrow \sqrt{(x_H - 2)^2 + (y_H + 1)^2} = 2$$

از طرفی چون H روی خط $L: y = \frac{3}{4}x$ قرار داره می‌تونیم مختصات H رو به صورت $H(x, \frac{3}{4}x)$ بنویسیم

$$\Rightarrow \sqrt{(x - 2)^2 + (\frac{3}{4}x + 1)^2} = 2$$

$$\Rightarrow (x - 2)^2 + (\frac{3}{4}x + 1)^2 = 4$$

$$\Rightarrow x^2 - 4x + 4 + \frac{9}{16}x^2 + \frac{3}{2}x + 1 = 4$$

$$\Rightarrow \frac{20}{16}x^2 - \frac{5}{4}x + 1 = 0 \quad \times 16 \Rightarrow$$

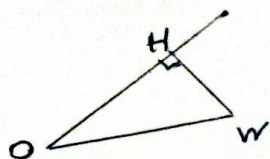
$$\Rightarrow 20x^2 - 5x + 16 = 0 \Rightarrow (5x - 4)^2 = 0$$

$$\Rightarrow 5x - 4 = 0 \Rightarrow x = \frac{4}{5}$$

$$\Rightarrow y = \frac{3}{4}x = \frac{3}{4}(\frac{4}{5}) = \frac{3}{5}$$

$$\Rightarrow \underline{H(\frac{4}{5}, \frac{3}{5})}$$

روش چهارم : دقت کنید که خط L از مبدا افتحات می‌گذرد
بنابراین مثلث OHW یک مثلث قائم الزامیه هست



فاصله WH رو که قبلاً برابر ۱ بدست آوردیم.

فاصله OW خیلی راحت محاسبه میشه

$$OW = \sqrt{x_W^2 + y_W^2} = \sqrt{(2)^2 + (-1)^2} = \sqrt{5}$$

از طرفی طبق قضیه فیثاغورث داریم:

$$OH^2 + HW^2 = OW^2 \Rightarrow OH^2 + 1 = 5$$

$$\Rightarrow OH = 1$$

از طرفی می‌دانیم $OH = \sqrt{x_H^2 + y_H^2}$ بنابراین

$$\Rightarrow OH = \sqrt{x_H^2 + y_H^2} = 1$$

و متناوب روشها را قبل افتحات H رو به صورت $H(x, \frac{3}{4}x)$ در نظر
می‌گیریم و در رابطه بالا جایگزین می‌کنیم.

$$\Rightarrow \sqrt{x^2 + (\frac{3}{4}x)^2} = 1 \Rightarrow x^2 + \frac{9}{16}x^2 = 1$$

$$\Rightarrow \frac{25}{16}x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm \frac{4}{5} \quad y = \frac{3}{5} \Rightarrow H(\frac{4}{5}, \frac{3}{5})$$

استاد : کافی یا لازم بدیم ؟!

آقا اجازه : نه دیدم کافی هست کردیم !

مثال نشان دهید دو خط با معادلات $5x - 12y + 8 = 0$ و $-10x + 24y + 10 = 0$

با یکدیگر موازی هستند

خب این تیکه که خیلی آسونه

$$L: 5x - 12y + 8 = 0 \Rightarrow 12y = 5x + 8 \Rightarrow y = \frac{5}{12}x + \frac{8}{12}$$

$$\Rightarrow m = \frac{5}{12} \quad \left| \text{شیب خط } L \right.$$

$$L': -10x + 24y + 10 = 0 \Rightarrow 24y = 10x - 10$$

$$\Rightarrow y = \frac{10}{24}x - \frac{10}{24} \Rightarrow m' = \frac{10}{24} = \frac{5}{12}$$

$$m' = \frac{5}{12} \quad \left| \text{شیب خط } L' \right.$$

$$\Rightarrow m = m' \Rightarrow L \parallel L'$$

ب) فاصله دو خط L و L' را معادل کنید. (راهنمایی: یک نقطه دلخواه روی یکی از خطوط در نظر بگیرید و فاصله آن را از خط دیگر حساب کنید)

$$L' \quad 24y = 10x - 10 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow y = 0 \quad (1, 0) \quad \left| \text{نقطه روی } L' \right.$$

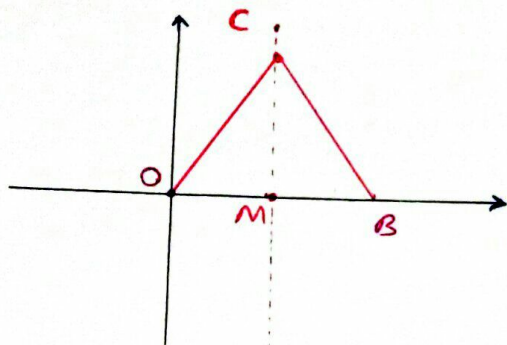
$$d = \frac{|5(1) - 12(0) + 8|}{\sqrt{5^2 + 12^2}} = \frac{13}{13} = 1$$

لم فاصله نقطه $(1, 0)$ از خط L که همان فاصله بین دو خط موازی L و L' می باشد

به مثال جالب از کتاب درسی

مثال: نقاط $(0,0)$ و $(4,0)$ دو رأس از یک مثلث متساوی الاضلاع هستند

مقتضات راس سوم آن را بیابید. مسأله حین جواب دارد؟
ردیف اول



حل: این مسئله جالبیه خوب دقت کنید

قبل از شروع حل شکل مسئله رو رسم می کنیم

اگر مثلث رو به صورت OBC نام گذاری

کنیم چون مثلث متساوی الاضلاع هست

$$\text{بنابراین } OB = OC = BC$$

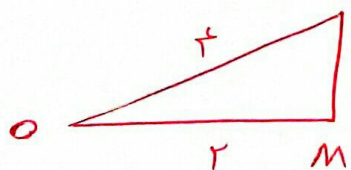
از طرفی واضح است که:

$$OB = |x_B - x_O| = 4$$

بنابراین $OB = OC = BC = 4$ به عبارت دیگر نقطه C از دو سر O و B

به یک فاصله هست بنابراین نقطه C روی عمود منصف OB قرار داره

اگر M نقطه وسط OB باشه. در مثلث قائم الزاویه OCM داریم:



$$\Rightarrow CM = |y_C - y_M| = |y_C - 0| = \sqrt{4^2 - 2^2}$$

$$\Rightarrow |y_C| = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow y_C = \pm 2\sqrt{3} \quad x_C = x_M = \frac{0+4}{2} = 2$$

$$\Rightarrow C(2, 2\sqrt{3}) \text{ و } C'(2, -2\sqrt{3})$$

دقت کنید نقطه C' قرینه C هست نسبت به محور x ها. پس مسئله

دو جواب دارد.

اوجی داریم : در روش قبل اگر نقاط O و B روی محور x ها قرار داشتند به مقدار y به مشکل می خوردیم بنابراین در اینجا از به روشی کامل تر و ساده تر حل مسئله استفاده می کنیم

چون مثلث OBC متساوی الساق است و همچنین داریم

$$OB = |x_B - x_O| = 4$$

بنابراین $OC = CB = 4$ از طرفی طبق فاصل دو نقطه داریم

$$OC = \sqrt{x_C^2 + y_C^2} = 4 \quad \left| \quad CB = \sqrt{(x_C - 4)^2 + y_C^2} = 4 \right|$$

از مقایسه دو عبارت بالا ضلای راحت متوجه می شویم که

$$x_C^2 = (x_C - 4)^2 \Rightarrow x_C^2 = x_C^2 - 8x_C + 16$$

$$\Rightarrow 8x_C = 16 \Rightarrow x_C = 2$$

$$\Rightarrow \sqrt{x_C^2 + y_C^2} = 4 \Rightarrow \sqrt{2^2 + y_C^2} = 4$$

جایگذاری درستی از روابط

$$\Rightarrow y_C^2 = 16 - 4 = 12 \Rightarrow y_C = \pm \sqrt{12} = \pm 2\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow C(2, 2\sqrt{3}) \quad \left| \quad C'(2, -2\sqrt{3}) \right|$$

همونطور که گفتیم مسئله دو جواب دارد

نقاط C و C' نسبت به محور x ها قرینه هستند.

مسائلی از امتحانات نهایی آبادان و حومه

خب! تا اینجا خسته نباشید. بچه از یاد گرفتن اصول هندسه تعلیمی در این قسمت با هم برخی از مسائل مغرک می رو با هم حل می کنیم این مسائل عمدتاً از امتحانات نهایی آبادان و حومه انتخاب شدن! بنابراین در نگاه اول ممکنه به خورده مشکل به نظر برس. اما نایم هستم اصلاً نگران نباشید!

حب بریم سراغ اولین مسئله

مسئله: در مسئله ص ۹ (مربع $ABCD$...) بدون داشتن مختصات نقطه C مختصات نقطه D را بیابید. سپس با داشتن مختصات D نقطه C را بیابید.

اگر یادتون باشه نوی ص ۱۱ گفتیم که بدون داشتن مختصات نقطه C هم می تونه مسئله رو حل کرد. که در اینجا با هم حلش می کنیم. قبلاً در این مسئله سبب خط AB رو برابر $\frac{5}{3}$ بدست آوردیم و چون AD بر AB عمود هست بنابراین

$$m_{AD} = -\frac{5}{3}$$

از طرفی چون چهار ضلعی $ABCD$ مربع هست پس $AD=AB$

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{(10 - 5)^2 + (4 - 1)^2} = \sqrt{34}$$

$$\Rightarrow AD = AB = \sqrt{34}$$

$$AD = \sqrt{(x_D - x_A)^2 + (y_D - y_A)^2} = \sqrt{34}$$

$$\Rightarrow \sqrt{(x_D - 5)^2 + (y_D - 1)^2} = \sqrt{34}$$

$$\Rightarrow (x_D - 5)^2 + (y_D - 1)^2 = 34 \quad *$$

دقت کنید رابطه بالا ۲ مجهول دارد بنابراین باید به دنبال یک رابطه دیگر باشیم.

دقت کنید که نقطه D روی خط AD هست بنابراین اول معادله خط AD رو می نویسیم:

$$\Rightarrow y - y_A = m_{AD} (x - x_A)$$

$$\Rightarrow y - 1 = \frac{-5}{3} (x - 5) \quad ** \quad \text{معادله AD}$$

بنابراین اگر در رابطه * به جای $y - 1$ عبارت $\frac{-5}{3} (x - 5)$

روا در رابطه ** قرار بدهیم داریم: (دقت کنید که متغیر D در معادله AD صدق می کند)

$$\Rightarrow (x_D - 5)^2 + \left[\frac{-5}{3} (x_D - 5) \right]^2 = 34$$

$$\Rightarrow (x_D - 5)^2 + \frac{25}{9} (x_D - 5)^2 = 34 \Rightarrow \frac{34}{9} (x_D - 5)^2 = 34$$

$$\Rightarrow x_D - 5 = \pm 3 \Rightarrow \underline{x_D = 8} \text{ و } \underline{x_D = 2}$$



حالاً معادله بدست آورده و آنرا x_D به در معادله خط AD قرار می دهیم تا معادله y_D بدست بیاید.

$$\Rightarrow y_D - 1 = -\frac{5}{3}(x_D - 5) \Rightarrow$$

$$x_D = 1 \Rightarrow y_D - 1 = -\frac{5}{3}(1 - 5) \Rightarrow y_D = -4$$

غرف

که دقت کنید، رئوس مثلث ABC باید در ربع اول قرار داشته باشند.

$$x_D = 2 \Rightarrow y_D - 1 = -\frac{5}{3}(2 - 5) \Rightarrow y_D = 4$$

$$\Rightarrow \underline{D(2, 4)} \quad \text{مختصات نقطه } D$$

ب) اکنون با داشتن مختصات نقطه D مختصات نقطه C را بیابیم.

در مثال مثلث مختصات D را با استفاده از C پیدا کردیم در اینجا هم می توانیم از همین روش استفاده کنیم (یعنی معادله خطوط BC و CD ردیف کنیم که محل تقاطع خطها می باشد نقطه C)

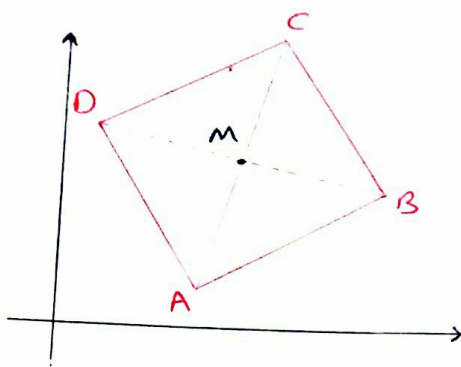
اما در اینجا از به روش آسونتر استفاده می کنیم (مثابه تری لا مثلث کتاب) در واقع در اینجا از این نکته استفاده می کنیم که در مربع قطرهای یکدیگر را دو نصف می کنند (در متوازی الاضلاع و مستطیل هم این نکته برقراره)

پس اگر محل تقاطع قطرهای BD و AC نقطه M بنامیم نقطه M هم وسط AC هست و هم وسط BD .

f.

از طریق جوت مختصات نقاطا (B و D) رو داریم می توین مختصات نقطه

M رو خیلی راحت بدست بیاریم.



$$x_M = \frac{x_B + x_D}{2} = \frac{10 + 2}{2} = 4$$

$$y_M = \frac{y_B + y_D}{2} = \frac{4 + 6}{2} = 5$$

$$\Rightarrow M(4, 5)$$

حالا با داشتن مختصات نقطه M و A می توین مختصات C رو بدست

بیاریم (درست مثل مسئله پرچم - سوال 4 کتاب درسی)

$$\Rightarrow x_M = \frac{x_A + x_C}{2} = 4 \Rightarrow x_A + x_C = 12$$

$$\Rightarrow 5 + x_C = 12 \Rightarrow x_C = 7$$

به همین صورت

$$\Rightarrow y_M = \frac{y_A + y_C}{2} = 5 \Rightarrow y_A + y_C = 10$$

$$\Rightarrow 1 + y_C = 10 \Rightarrow y_C = 9$$

$$\Rightarrow C(7, 9)$$

مختصات C

* دقت کنید از این مسئله مربع صیغه مسائل جابجایی طرح کرد که فعلاً فرصت

نسبت بیشتر بهش بپردازیم. مثلاً فرض کنید مختصات نقاط A و C رو

به ما بدن و مختصات B و D رو بخوان ...

۴۱

مثال : نشان دهید سه نقطه A و B و C با مختصات داده شده روی یک خط راست قرار دارند.
 $A(4, -5)$ $B(5, -2)$
 $C(4, 1)$

به مثال کلاسیک و قدیمی!

این مسئله رو می‌تونیم از روشهای منطقی حل کرد که ما دو تا از این روشها رو با هم مرور می‌کنیم

روش اول : اول دو نقطه دلخواه از سه نقطه داده شده (مثلاً A و B) رو در نظر می‌گیریم و معادله خط AB رو می‌نویسیم :

$$L_{AB}: y - y_A = m(x - x_A)$$

اول شیب رو حساب می‌کنیم

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{-2 + 5}{5 - 4} = -3$$

$$\Rightarrow y + 5 = -3(x - 4) \Rightarrow y = -3x + 13$$

حالا مختصات نقطه C رو در معادله خط AB قرار می‌دهیم که اگر صدق کرد یعنی نقطه C روی خط AB قرار داره.

$$\Rightarrow y = -3x + 13 \Rightarrow 1 = -3(4) + 13 \Rightarrow 1 = 1 \checkmark$$

پس نقطه C روی AB قرار داره به عبارت دیگر هر سه نقطه روی یک خط راست قرار دارند.

می‌دانیم که اگر شیب دو خط برابر باشد آن دو خط با هم موازی هستند
 یک حالت خاص موازی بودن زمانی هست که دو خط برهم منطبق هستند
در واقع زمانی دو خط برهم منطبق هستند که شیب آنها برابر بوده و
یک نقطه مشترک داشته باشند

الکون کافیست بپذیریم $m_{AB} = m_{AC}$ و چون دو خط AB و AC در
 نقطه A مشترک هستند پس برهم منطبق می‌باشند

$$m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{-2 + 5}{5 - 4} = -3$$

$$m_{AC} = \frac{y_C - y_A}{x_C - x_A} = \frac{1 + 5}{4 - 4} = -3$$

$$\rightarrow m_{AB} = m_{AC}$$

پس دو خط AB و AC برهم منطبق هستند.

واسته این مسئله راه حل‌ها را چالش‌دهنده‌ای هم می‌توانست مثلاً اگر
 نقطه B بین A و C باشد کافیست بپذیریم که

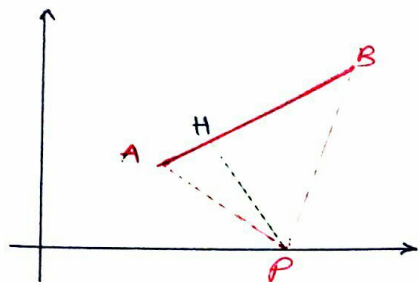
$$AB + BC = AC$$

در این صورت سه نقطه A و B و C روی یک خط راست قرار
 دارند.

مسئله: دو نقطه A و B به مختصات $A(3, 5)$ و $B(11, 11)$ معروفی است

مختصات نقطه P روی محور x ها را حیات بیابید که مساحت مثلث

ABP برابر ۳ واحد باشد



حل: ابتدا شکل مسئله رو رسم می کنیم

و می بینیم مختصات P به صورت

$P(a, 0)$ باشد

در این صورت مساحت مثلث ABP برابر است با:

$$S_{ABP} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot PH$$

طول ارتفاع PH همان فاصله نقطه P تا خط AB می باشد بنابراین

ابتدا طول AB و معادله خط AB را معادله می کنیم

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{(11 - 3)^2 + (11 - 5)^2} = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10$$

$$m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{11 - 5}{11 - 3} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$$

$$L_{AB}: y - y_B = m_{AB} (x - x_B) \Rightarrow y - 11 = \frac{3}{4} (x - 11)$$

$$(x, y) \Rightarrow 4y - 44 = 3x - 33 \Rightarrow 4y - 3x = 11$$

$$4y - 3x - 11 = 0$$

معادله خط AB

۴۴

حالا فاصله نقطه P به معتمات $P(a, 0)$ رو از خط AB به معادله
 $4y - 2x - 11 = 0$ محاسبه می‌کنیم.

$$PH = \frac{|4(0) - 2(a) - 11|}{\sqrt{4^2 + 2^2}} = \frac{|-2a - 11|}{5}$$

از طرفی در مسئله مساحت مثلث ABP برابر 30 داده شده است.
بنابراین:

$$S_{ABP} = \frac{1}{2} AB \cdot PH = 30$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} (10) \frac{|-2a - 11|}{5} = 30$$

$$\Rightarrow |-2a - 11| = 30 \Rightarrow -2a - 11 = \pm 30$$

$$\Rightarrow -2a - 11 = 30 \Rightarrow 2a = -41 \Rightarrow a = -\frac{41}{2}$$

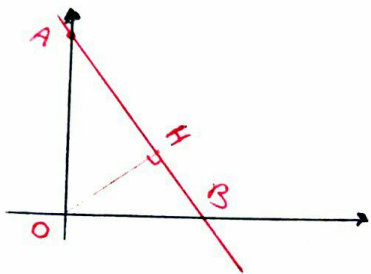
$$-2a - 11 = -30 \Rightarrow 2a = 19 \Rightarrow a = \frac{19}{2}$$

$$P_1\left(-\frac{41}{2}, 0\right) \quad P_2\left(\frac{19}{2}, 0\right)$$

بنابراین مسئله دو جواب دارد. و چون در صورت مسئله محدودیتی
ذکر نشده هر دو جواب قابل قبول هستند.

مسئله: خط L دارای شیب برابر -2 بوده و فاصله آن از مبدأ

مقتضات برابر 2 است. مساحت مثلثی را که این خط با محورهای مختصات می‌سازد بدست آورید.



حل: اول از همه شکل مسئله رو رسم می‌کنیم

اگر معادله خط رو به صورت $y = mx + h$ در نظر

بگیریم چون $m = -2$ هست پس معادله خط به صورت

$$y = -2x + h \text{ در میاد.}$$

حالا فاصله مبدأ و مقتضات را از این خط پیدا می‌کنیم

$$y + 2x - h = 0 \Rightarrow OH = \frac{|(0) + 2(0) - h|}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = 2$$

$$\Rightarrow \frac{|h|}{\sqrt{5}} = 2 \Rightarrow |h| = 2\sqrt{5} \Rightarrow h = \pm 2\sqrt{5}$$

و اضافه که مقدار منفی h مربوط به مثلثی هست که در ناحیه سوم قرار داره چون هر دو ضلع مساحت یکسان دارند کافیه مقدار مثبت h رو در نظر بگیریم

که در این صورت معادله خط به صورت $y = -2x + 2\sqrt{5}$ در میاد.

حالا برای محاسبه مساحت مثلث کافیه مقادیر A و B یعنی عرضی از مبدأ و طولی از مبدأ خط رو پیدا کنیم.

$$\left. \begin{array}{l} x=0 \Rightarrow OA = h = 2\sqrt{5} \\ y=0 \Rightarrow 0 = -2x + 2\sqrt{5} \Rightarrow OB = x = \sqrt{5} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{که عرضی از مبدأ} \\ \text{طول از مبدأ} \end{array}$$

$$\Rightarrow S_{ABO} = \frac{1}{2} (OA)(OB) = \frac{1}{2} (2\sqrt{5})(\sqrt{5}) = 5$$

که مساحت مثلث ABO

مثال: قطار سریع السیر آبادان - برزیل در مسیر خود در ایستگاههای C و D توقف می کند اگر مقصات آبادان A(۳-۱) و مقصات برزیل B(۹،۷) باشد. مقصات ایستگاههای C و D را بیابید. فرض کنید ایستگاههای A و C و D و B هم فاصله هستند.

حل: همونطور که در شکل رد کرد



می بینید ایستگاههای C و D مسیر AB رو به سه قسمت مساوی تقسیم

می کنند. بنابراین می توانیم بگوییم C وسط AD و D وسط CB هست

پس داریم:

$$\underline{\text{C وسط AD}} : x_c = \frac{x_A + x_D}{2} = \frac{3 + x_D}{2} \Rightarrow 2x_c - x_D = 3 \quad (1)$$

$$y_c = \frac{y_A + y_D}{2} = \frac{-1 + y_D}{2} \Rightarrow 2y_c - y_D = -1 \quad (2)$$

$$\underline{\text{D وسط CB}} : x_D = \frac{x_C + x_B}{2} = \frac{x_C + 9}{2} \Rightarrow 2x_D - x_C = 9 \quad (3)$$

$$y_D = \frac{y_C + y_B}{2} = \frac{y_C + 7}{2} \Rightarrow 2y_D - y_C = 7 \quad (4)$$

اگر روابط (1) و (3) رو با هم و روابط (2) و (4) رو با هم بنویسیم خیلی راحت مقصات x_c و x_D و y_c و y_D بدست میان. (حل رد می زارم به همراه خودتون)

$$x_c = 5 \quad x_D = 7 \quad y_c = \frac{5}{3} \quad y_D = \frac{14}{3}$$

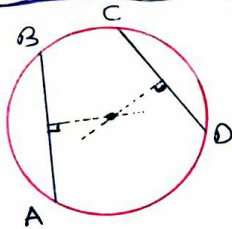
$$\Rightarrow C(5, \frac{5}{3}) \quad D(7, \frac{14}{3})$$

مثال: اگر $A(۱,۵)$ و $B(-۲,۲)$ و $C(۴,۲)$ سه نقطه از یک دایره باشند

الف) مختصات مرکز دایره را بیابید
ب) شعاع دایره را محاسبه کنید.

به مسئله چالشناک! برای حل این مسئله از یک نکته مهم استفاده می‌کنیم.

در یک دایره، عمود منصف دو وتر دلخواه (غیر موازی) یکدیگر را در مرکز دایره قطع می‌کنند.



آقا اجازه: این نکته را یادمون بنماید!

استاد: یعنی وجه‌انگاشته به این خوشگلی یادت بنماید!

همین الان بپر برو فصل شهر ریاضی شهر رو مرور کن (همونی که عکس پشتاب شکسته داره!)

خب بریم سراغ حل مسئله. برای حل این مسئله معادله عمود منصف خطوط AB و AC رو بدست آورده و بعدش نقطه تقاطع اونها که همون مرکز دایره هست رو محاسبه کنیم.

نقطه یادتون باشه برای نوشتن معادله عمود منصف به نقطه وسط پاره خط و شیب خط نیاز داریم.

(شیب خط رو معکوسی و قرینه می‌کنیم تا شیب عمود منصف دربیاد)



۴۸

عمود منصف AB

ادل شیب خط AB رو محاسب می‌کنیم

$$m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{2 - 5}{-2 - 1} = 1 \quad \text{شیب AB}$$

$$m'_{AB} = \frac{1}{m_{AB}} = -1 \quad \text{شیب عمود منصف AB}$$

در قدم بعدی مختصات نقطه وسط AB رو پیدا می‌کنیم.

$$x_{m_1} = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{1 + 2}{2} = \frac{3}{2} \quad y_{m_1} = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{5 + 2}{2} = \frac{7}{2}$$

$$M_1 \left(\frac{3}{2}, \frac{7}{2} \right) \quad \text{مختصات نقطه وسط AB}$$

در آخر معادله عمود منصف AB رو می‌نویسیم:

$$L': y - y_{m_1} = m'_{AB} (x - x_{m_1}) \Rightarrow y - \frac{7}{2} = (-1) \left(x - \frac{3}{2} \right)$$

$$\Rightarrow y = 3 - x \quad \text{معادله عمود منصف AB}$$

به همین صورت معادله عمود منصف AC رو می‌نویسیم (اینجا خلاصه می‌نویسیم)

$$m_{AC} = -1 \Rightarrow m'_{AC} = 1 \Rightarrow M_2 \left(\frac{5}{2}, \frac{1}{2} \right) \Rightarrow y = x + 1 \quad \text{معادله عمود منصف AC}$$

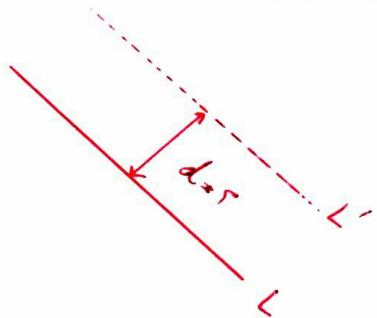
حالا معادله دو عمود منصف رو در یک دستگاه می‌نویسیم و نقطه تقاطع اون‌ها یعنی مرکز دایره رو پیدا می‌کنیم.

$$\begin{cases} y = 3 - x \\ y = 1 + x \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{مرکز دایره } (1, 2)$$

$$R = OA = \sqrt{(1-1)^2 + (2-2)^2} = 2 \quad \text{شعاع دایره هم خیلی راحت درمیاد}$$

مثال معادله خطی را بنویسید که با خط $3x + 4y = 12$ موازی بوده و فاصله آن از این خط برابر ۲ واحد باشد. مسئله معین جواب دارد؟



حل اگر خط موازی با L رود L' نام گذاری کنیم داریم:

$$L \parallel L' \Rightarrow m_L = m_{L'}$$

به عبارت دیگر چون دو خط موازی هستند شیب اونها هم برابر هست پس اول شیب خط L رو بدست میاریم.

$$L: 3x + 4y = 12 \Rightarrow 4y = 12 - 3x \Rightarrow y = 3 - \frac{3}{4}x \\ \Rightarrow m_L = -\frac{3}{4}$$

بنابراین $m_{L'} = -\frac{3}{4}$ می شود پس می توانیم خط L' رو به صورت

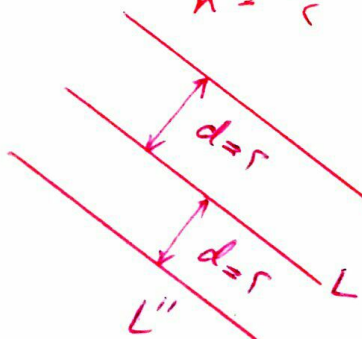
$y = -\frac{3}{4}x + h$ در نظر بگیریم حالاً به نقطه دلخواه از خط L' مثلاً $(0, h)$ رو در نظر می گیریم و فاصله اون رو تا خط L حساب می کنیم و برابر ۲ قرار می دیم.

$$\begin{aligned} 3x + 4y = 12 \\ \downarrow \\ 3x + 4y - 12 = 0 \end{aligned} \quad d = \frac{|3(0) + 4(h) - 12|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{|4h - 12|}{5} = 2$$

$$\Rightarrow 4h - 12 = \pm 10 \Rightarrow h_1 = \frac{1}{2} \text{ و } h_2 = \frac{11}{2}$$

$$h = \frac{11}{2} \Rightarrow y = -\frac{3}{4}x + \frac{11}{2} \Rightarrow 4y + 3x = 22 \quad L'$$

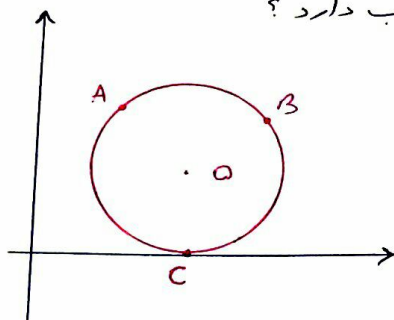
$$h = \frac{1}{2} \Rightarrow y = -\frac{3}{4}x + \frac{1}{2} \Rightarrow 4y + 3x = 2 \quad L''$$



همانطور که می بینید مسئله دارای دو جواب L' و L'' می باشد که یکی از خطوط در بالای L و خط دیگر در پایین L قرار می گیرد.

۵.

مثال: شعاع دایره‌ای را بیابید که از نقاط $A(10,9)$ و $B(18,18)$ گذشته و بر محور x ها مماس باشد. مسئله حین جواب دارد؟



حل: مشخصات مرکز دایره رو با $O(x, y)$ و محل مماسی دایره با محور x ها رو با $C(x, 0)$ بنویس. می‌دیم. واضحه که داریم:

$$OA = OB = OC$$

از طرفی داریم:

$$OA = \sqrt{(x-1)^2 + (y-9)^2} \quad OB = \sqrt{(x-18)^2 + (y-18)^2}$$

$$OC = \sqrt{(x-x)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{y^2} = y \quad \rightarrow \text{همون شعاع دایره می‌شه!}$$

اول قرار می‌دیم $OA = OB$ که داریم:

$$OA = OB \Rightarrow (x-1)^2 + (y-9)^2 = (x-18)^2 + (y-18)^2$$

با به توان رساندن و ساده سازی طرفین معادله بالا داریم:

$$\Rightarrow -2x - 18y + 128 = -14x - 14y + 128 \Rightarrow y = 7x - 23 \quad (1)$$

به همین صورت قرار می‌دیم: $OB = OC$

$$(x-18)^2 + (y-18)^2 = y^2 \xrightarrow{\text{ساده سازی}} x^2 - 14x - 14y + 128 = 0 \quad (5)$$

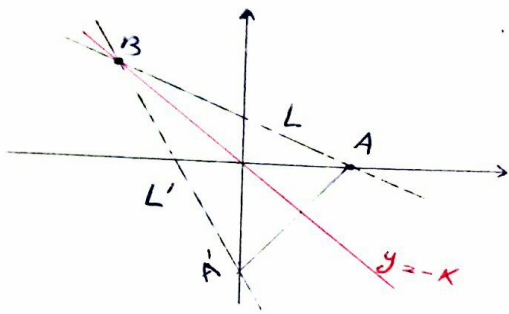
$$(1) \rightarrow (5) \Rightarrow x^2 - 14x - 14(7x - 23) + 128 = 0 \Rightarrow x^2 - 128x + 494 = 0$$

$$(x-4)(x-124) = 0 \quad \begin{cases} \xrightarrow{(1) \text{ در } x=4} y = 7(4) - 23 = 5 \\ \xrightarrow{(1) \text{ در } x=124} y = 7(124) - 23 = 845 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} R = y = 5 \\ R = y = 845 \end{cases}$$

مسئله دو جواب دارد.

مثال: دینیه خط $L: 2x + 3y = 2$ را نسبت به خط $y = -x$ رسم کرده ایم معادله خط جدید را بیابید.



حل: برای پیدا کردن دینیه خط نسبت به خط $y = -x$ کافیست دو نقطه دلخواه از خط L رو در نظر گرفته و دینیه آنها را نسبت

به خط $y = -x$ بیابیم. البته چون خط L با $y = -x$ برخورد می کند (نقطه B) می توان تنها دینیه یک نقطه را پیدا نمود.

الکون نقطه $A(2, 0)$ را روی خط L در نظر می گیریم برای پیدا کردن دینیه A یعنی A' (نسبت به خط $y = -x$) ابتدا باید معادله خط AA' را که بر $y = -x$ عمود است بنویسیم.

چون شیب $y = -x$ برابر -1 است پس شیب ~~خط~~ خط AA' برابر 1 می شود.

$$AA': y - y_A = m(x - x_A) \Rightarrow y - 0 = (1)(x - 2)$$

$$\Rightarrow \underline{y = x - 2} \quad \text{معادله خط } AA'$$

حالا باید محل تقاطع خط AA' و $y = -x$ پیدا کنیم واضح است که این نقطه همان M یعنی وسط AA' است.

$$\Rightarrow \begin{cases} y = x - 2 \\ y = -x \end{cases} \Rightarrow \begin{aligned} x - 2 &= -x \Rightarrow 2x = 2 \\ x &= \frac{2}{2} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \underline{y = -x = -\frac{2}{2}} \Rightarrow \underline{M\left(\frac{2}{2}, -\frac{2}{2}\right)}$$

۵۲

حالا L داشتن معضلات A و M می تونیم معضلات نقطه A' رو بدست بیاریم :

$$x_M = \frac{x_A + x_{A'}}{2} \Rightarrow \frac{3}{2} = \frac{2 + x_{A'}}{2} \Rightarrow x_{A'} = 0$$

$$y_M = \frac{y_A + y_{A'}}{2} \Rightarrow -\frac{3}{2} = \frac{0 + y_{A'}}{2} \Rightarrow y_{A'} = -3$$

$$\Rightarrow A'(0, -3)$$

حالا باینه محل تقاطع خط L با خط $y = -x$ یعنی نقطه B رو بدست بیاریم

$$\begin{cases} 2x + 2y = 4 \\ y = -x \end{cases} \Rightarrow 2x + 2(-x) = 4 \Rightarrow x = -4$$
$$y = 4$$

$$\Rightarrow B(-4, 4)$$

حالا می تونیم معادله خط L' رو با داشتن معضلات A' و B بنویسیم

$$y - y_{A'} = m(x - x_{A'}) \Rightarrow m = \frac{y_B - y_{A'}}{x_B - x_{A'}} = \frac{4 + 3}{-4 - 0} = -\frac{7}{4}$$

$$\Rightarrow y + 3 = -\frac{7}{4}(x - 0)$$

$$\Rightarrow y = -\frac{7}{4}x - 3 \Rightarrow 2y + 7x = -6$$

له قرینه خط L نسبت به خط $y = -x$

جواب نری ها (به زودی) در کانال تلگرام @riazikhor

۱) نشان دهید نقاط زیر روی یک خط راست واقع هستند

الف) $(0, 5)$ و $(5, 0)$ و $(-1, 4)$

ب) $(-a, 2b)$ و $(2a, -b)$ و $(a, 0)$

۵) یک خط عمودی مثلث به رئوس $O(0,0)$ و $C(9,0)$ و $D(18,4)$ را به دو ناحیه با مساحت‌های مساوی تقسیم می‌کند. معادله خط مذکور را بیابید.

۳) مثال قبل را با فرضی خط افقی حل کنید.

۴) نقطه A روی خط $4x + 3y = 48$ ، نقطه B روی خط $x + 3y + 10 = 0$ واقع است اگر مختصات نقطه وسط AB برابر $M(4, 5)$ باشد. مطلوبست محاسبه مختصات A و B

۵) نشان دهید که خط راست به معادله $(2m+1)x - (m-1)y + 7m-1 = 0$

به ازای تمامی مقادیر حقیقی m همیشه از یک نقطه ثابت می‌گذرد
مختصات این نقطه ثابت را بیابید.

۶) مطلوبست محاسبه مساحت چهارضلعی $ABCD$ به مختصات زیر

$A(0,0)$ $B(2,3)$ $C(4,2)$ $D(1,0)$